A Mais Bela Fórmula para Números Primos que Produz Todos os Primos e Somente Primos

Autor: Eric Campos Bastos Guedes, pesquisador independente, 21/06/2025

A fórmula é:

$$p = \sqrt[j]{k\,n! + 1}$$

Sujeita às seguintes condições:

(*i*) *p*, *j*, *k*, *n* são inteiros positivos e
(ii) $p < (n + 1)^2$

Sob essas condições, *p* será sempre um número primo, e todos os primos *p* podem ser expressos na forma acima. Significa dizer que essa fórmula produz todos os primos, e somente primos.

Primeiro vamos mostrar que a fórmula produz somente números primos.

Prova.

Lema 1:
Sejam *u* e *d* inteiros, com $d > 1$. Se *d* divide *u*, então *d* não divide $u + 1$.

Prova: Suponha que *u* e *d* são inteiros, com $d > 1$ e d dividindo *u*. Se *d* dividisse $u + 1$ então *d* dividiria a diferença $1 = (u + 1) - u$, posto que *d* dividiria minuendo $(u + 1)$ e subtraendo (u), isto é, seria $d = 1$ ou $d = -1$, o que contrariaria a hipótese $d > 1$.

Lema 2:
Sejam *u*, *j*, *d* inteiros positivos, e seja *r* a raiz *j*-ésima de *u* ($r = u^{1/j}$), sendo *r* um inteiro positivo. Se *d* não divide *u*, então *d* não divide *r*.

Prova: Sejam *u*, *j*, *d* inteiros positivos, e seja *r* a raiz *j*-ésima de *u* ($r = u^{1/j}$), sendo *r* um inteiro positivo (isto é, *u* é a *j*-ésima potência perfeita de *r*). Suponha que *d* divide *r*. Então, trivialmente, *d* divide o produto $r(r^{j-1})$ $(= r^j = u)$, visto que *d* divide o primeiro fator *r*, portanto *d* divide $u = r^j$. Ficou provado que se *d* divide *r*, então *d* divide *u*. Isso implica, por contrapositiva, que se *d* não divide $u = r^j$, então *d* não divide *r* (pois se *d* dividisse *r*, então *d* dividiria $u = r^j$ também)

Lema 3:
Se *q* e *m* são inteiros positivos tais que $q < (m + 1)^2$ e *q* é um número composto, então *q* possui algum divisor *d* satisfazendo $1 < d \leq m$.

Prova: Suponha que *q* e *m* são inteiros positivos tais que $q < (m + 1)^2$ e q é um número composto. Como *q* é composto, então $q = ab$, para certos inteiros positivos *a*, *b* maiores que 1. Não pode ser simultaneamente $a \geq m + 1$ e $b \geq m + 1$, pois se fosse assim, seria $q = ab \geq (m + 1)^2$, contrariando a hipótese $q < (m + 1)^2$. Logo, ou $a < m + 1$, ou $b < m + 1$, isto é, ou $a \leq m$, ou $b \leq m$, isto é, $q = ab$ possui algum divisor d satisfazendo $1 < d \leq m$.

Agora vamos provar que a fórmula $p = (kn! + 1)^{1/j}$ produz somente números primos sob as condições (*i*) *p, j, k, n* são inteiros positivos e (*ii*) $p < (n + 1)^2$

Como todo inteiro *d*, satisfazendo $1 < d \leq n$, divide $kn!$, então, conforme o Lema 1, nenhum inteiro *d* satisfazendo $1 < d \leq n$, divide $kn! + 1$. Assim, como nenhum $d = 2, 3, 4, \ldots, n$ divide $kn! + 1$, então, pelo Lema 2, nenhum $d = 2, 3, 4, \ldots n$ divide $p = (kn! + 1)^{1/j}$. Logo, *p* não tem nenhum fator *d* satisfazendo $1 < d \leq n$. Entretanto, de acordo com o Lema 3 e a condição (*ii*) $p < (n + 1)^2$, se *p* fosse composto, possuiria algum fator *d* satisfazendo $1 < d \leq n$, o que vimos que não ocorre. Logo *p* é necessariamente primo.

Agora vamos provar que todo número primo *p* pode ser expresso pela equação:

$$p = \sqrt[j]{k\,n! + 1} \quad \text{(Equação 1)}$$

Sujeita às seguintes condições:

(*i*) *p, j, k, n* são inteiros positivos e
(ii) $p < (n + 1)^2$

Inicialmente, vamos enunciar o Teorema Totiente de Euler:

Sejam a inteiro e m inteiro positivo. Se a e m são coprimos, então

$$a^{\Phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

onde ϕ(m) é a função totiente de Euler que retorna o número de inteiros positivos menores ou iguais a m que são coprimos com m.

Vamos agora provar que a fórmula expressa pela Equação 1 produz todos os números primos *p*.

$p = \sqrt[j]{k\,n! + 1}$ (Equação 1)

A Equação 1 acima vale se existir um inteiro positivo *j* tal que:

$p^j = k\,n! + 1$ (Equação 2)

Podemos sempre escolher *n* de modo que $n < p < (n + 1)^2$. A equação 2 pode ser reescrita assim:

$p^j \equiv 1 \pmod{n!}$ (Equação 3)

Como *p* e *n*! são coprimos (pois já vimos que *p* não tem nenhum fator *d* satisfazendo $1 < d \leq n$), o Teorema Totiente de Euler, também chamado Teorema de Euler-Fermat, nos garante que existe $j = \phi(n!)$ tal que:

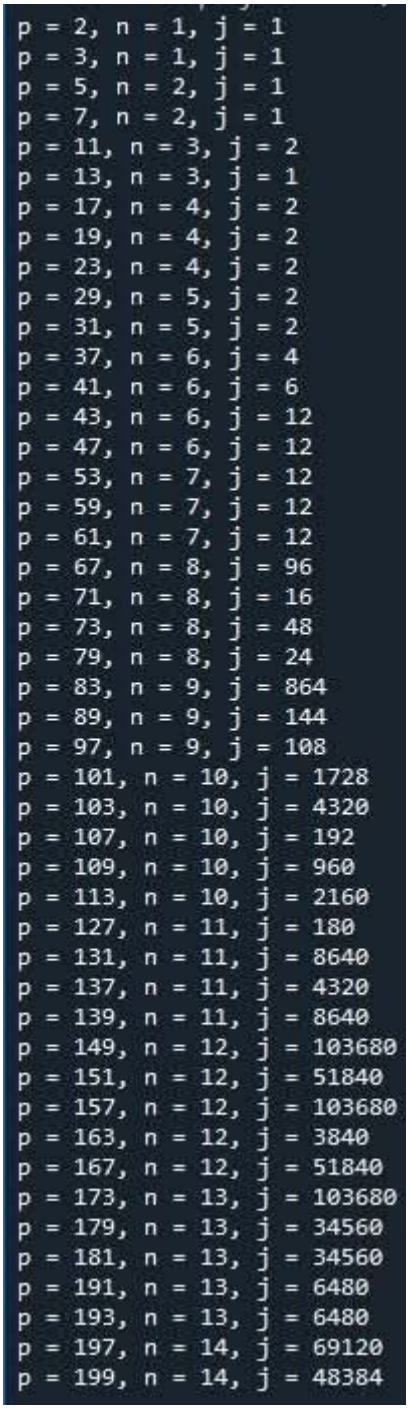
$$p^{\Phi(n!)} \equiv 1 \pmod{n!}$$

Logo, para todo número primo *p*, existe algum inteiro positivo *j* para o qual valem as Equações 3, 2 e 1, onde *k* é o quociente da divisão de p^j por por *n*!, e 1 é o resto.

Essa fórmula aparece no último capítulo de meu e-book, “Fórmulas para Números Primos”.
Sem dúvida, essa fórmula é uma pérola da Matemática.

O estudioso Hugo Rafael Oliveira Ribeiro fez uma notável contribuição para explicar "A Mais Bela Fórmula para Números Primos" que é a seguinte:
"Interessante.
Realmente todo número satisfazendo essa condição é primo. Caso contrário, existiria um menor primo q dividindo p. Logo q <= sqrt(p) < n+1 e teríamos q dividindo tanto p^j quando n!, o que é um absurdo.
Mas também temos que todo primo se escreve dessa forma. Dado primo p, tome qualquer número n satisfazendo n < p. Então p e n! são primos entre ai. Logo, pelo Teorema de Fermat-Euler, se tomarmos j = \phi(n!) (Euler Totient), temos p^j = kn! + 1 para algum inteiro k.
Como já mencionado, essa fórmula não tem efeitos práticos imediatos para calcular números primos porque é muito lenta. Curiosamente, esse problema não ocorre pela presença do fatorial e sim pela exponenciação. Por exemplo, dado p = 149, o menor n possível é n = 12 para o qual o menor valor de j é j = 103.680. Já para p = 211, o menor valor possível de n é n = 14, mas o menor valor possível de j ultrapassa 240.000.000.
A tabela abaixo ilustra como, na prática, conseguimos valores muito menores que \phi(n!) que satisfazem o enunciado:" ’

‘A tabela [abaixo, na página seguinte] foi feita por Hugo Rafael Oliveira Ribeiro . Gratidão.
A tabela [infra] se refere aos valores de p, n e j na mais bela fórmula para números primos, que é: p = (k×n! + 1)^(1/j) ou p = Raiz_j-ésima_de(k×n! + 1), desde que as seguintes condições sejam satisfeitas: $p < (n + 1)^2$, e p, j, k, n devem ser inteiros positivos.’


p = 2, n = 1, j = 1
p = 3, n = 1, j = 1
p = 5, n = 2, j = 1
p = 7, n = 2, j = 1
p = 11, n = 3, j = 2
p = 13, n = 3, j = 1
p = 17, n = 4, j = 2
p = 19, n = 4, j = 2
p = 23, n = 4, j = 2
p = 29, n = 5, j = 2
p = 31, n = 5, j = 2
p = 37, n = 6, j = 4
p = 41, n = 6, j = 6
p = 43, n = 6, j = 12
p = 47, n = 6, j = 12
p = 53, n = 7, j = 12
p = 59, n = 7, j = 12
p = 61, n = 7, j = 12
p = 67, n = 8, j = 96
p = 71, n = 8, j = 16
p = 73, n = 8, j = 48
p = 79, n = 8, j = 24
p = 83, n = 9, j = 864
p = 89, n = 9, j = 144
p = 97, n = 9, j = 108
p = 101, n = 10, j = 1728
p = 103, n = 10, j = 4320
p = 107, n = 10, j = 192
p = 109, n = 10, j = 960
p = 113, n = 10, j = 2160
p = 127, n = 11, j = 180
p = 131, n = 11, j = 8640
p = 137, n = 11, j = 4320
p = 139, n = 11, j = 8640
p = 149, n = 12, j = 103680
p = 151, n = 12, j = 51840
p = 157, n = 12, j = 103680
p = 163, n = 12, j = 3840
p = 167, n = 12, j = 51840
p = 173, n = 13, j = 103680
p = 179, n = 13, j = 34560
p = 181, n = 13, j = 34560
p = 191, n = 13, j = 6480
p = 193, n = 13, j = 6480
p = 197, n = 14, j = 69120
p = 199, n = 14, j = 48384